A. G. BARBANCHO

Un modelo econométrico uniecuacional: la función de importación

El propósito de este trabajo consiste en cuantificar la función de importación de la economía española para ilustrar el modo econométrico de trabajar. La atención se centra, pues, en la metodología econométrica y no en el estudio de las importaciones españolas, aun cuando es éste el tema elegido.

I. Teoría de la función de importación

Tampoco se intenta aquí ni exponer ni resumir la teoría económica de las importaciones. Sólo nos limitamos a enunciar la teoría concreta que se va a utilizar.

Las importaciones se van a suponer una función del PNB y de los precios relativos de las importaciones. O sea, llamando Y a las importaciones, a precios constantes, X_2 al PNB, en pesetas constantes, y X_3 a la relación entre los precios de las importaciones y los precios interiores, los del PNB, se puede escribir de un modo general

$$Y = f(X_2, X_3) \qquad [1]$$

para la función de importación.

Pero así no queda lo suficientemente especificada, al no indicarse el tipo de función que liga a las tres variables. Una función concreta muy usual es la lineal, o sea

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 \qquad [2]$$

y otro tipo es la potencial generalizada, o función de Cobb-Douglas,

$$Y = A\, X_2^{\beta_2}\, X_3^{\beta_3} \qquad [3]$$

en que, como es sabido,

$$\beta_2 = E^{Y}_{X_2} \quad ; \quad \beta_3 = E^{Y}_{X_2} \qquad [4]$$

que dan las elasticidades (constantes siempre) de la variable Y con respecto a X_2 y a X_3.

Tomando logaritmos en [3] se tiene

$$\log Y = \log A + \beta_2 \log X_2 + \beta_3 \log X_3 \qquad [5]$$

que es una función lineal cuyos parámetros se cuantifican del mismo modo que [2].

En primer lugar, se cuantificará el modelo lineal [2] y luego se procederá a la cuantificación de [5] para poder conocer las elasticidades.

II. El modelo econométrico uniecuacional y lineal

Tanto [2] como [5] son modelos lineales uniecuacionales de dos variables independientes, o explicativas. Son lineales con respecto a los parámetros, así que podrá aplicarse la metodología de los mínimos cuadrados para cuantificar los parámetros, o sea, para tener valores estimados de β_1, β_2 y β_3. Sin embargo, es preciso con anterioridad reconocer explícitamente que las relaciones *exactas* [2] y [5] no se dan en la realidad. Se hace preciso, pues, *reconocer* el carácter estocástico de las relaciones, introduciendo un término de perturbación de tipo aleatorio que designaremos por ε. Así se tiene que [2] se convierte en

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon \qquad [6]$$

y [5] en

$$\log Y = \beta_1 + \beta_2 \log X_2 + \beta_3 \log X_3 + \varepsilon \qquad [7]$$

Sobre la variable ε se hacen las hipótesis usuales, de las que mencionaremos aquí la de distribución normal y la inexistencia de autocorrelación, hipótesis ésta de interés cuando la cuantificación se realiza con datos temporales, como se hará aquí.

Otra hipótesis de interés es la relativa a la inexistencia de colinealidad entre las variables independientes o explicativas. O sea, X_2 y X_3 son independientes de Y pero, además, deben ser independientes entre sí.

III. Los datos

Los datos de importaciones de bienes y servicios (variable dependiente, Y), de PNB (variable X_2) y de precios de las importaciones e interiores se tienen en la tabla 1, siendo la fuente de procedencia el III Plan de Desarrollo, «Series cronológicas del modelo econométrico».

TABLA 1

Años	P.N.B. 10^6 ptas. de 1969	Importaciones 10^6 ptas. de 1969	Índices de precios de imp.	Índices de precios del PNB
1960	1.052.184,9	73.184,9	70,84	58,95
1961	1.172.481,3	102.423,4	72,26	60,26
1962	1.279.181,3	137.300,1	73,86	63,84
1963	1.396.189,4	169.103,8	75,40	69,03
1964	1.475.481,0	191.333,2	77,20	73,73
1965	1.577.439,0	244.426,0	80,18	81,59
1966	1.699.553,8	280.660,1	83,37	86,92
1967	1.776.528,9	274.511,1	86,19	91,87
1968	1.874.855,8	292.060,9	96,61	96,26
1969	2.011.687,7	340.689,3	100,00	100,00

Para simplificar en gran medida los cálculos que es preciso realizar, se van a tomar en todas las variables números índices. Tales *índices* están en la tabla 2, todos referidos a 1969 como base. La variable Y = *índices de importaciones de bienes y servicios*, en pesetas constantes para eliminar las depreciaciones monetarias; la variable X_1 toma siempre el valor 1 y servirá para

TABLA 2

Años	Y	X_1	X_2	X_3
1960	21	1	52	120
1961	30	1	58	120
1962	40	1	64	116
1963	50	1	69	109
1964	56	1	73	105
1965	72	1	78	98
1966	82	1	84	96
1967	81	1	88	94
1968	86	1	93	100
1969	100	1	100	100

acompañar al término independiente de [6] o de [7]; la variable X_2 = *índices* del PNB en pesetas constantes, o sea, sin el efecto monetario, y X_3 = *al cociente* entre los índices de precios de las importaciones y los del *PNB*, cociente expresado a su vez en forma de índice.

Tampoco se entra aquí a discutir si los datos de partida para la obtención de la función de importación de la economía española son buenos o no. Simplemente los aceptamos como buenos.

IV. Estimadores minimocuadráticos

Para las variables Y, X_2 y X_3 tenemos la relación [6], o sea

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \varepsilon$$

que se ha de verificar para la $n = 10$ observaciones, o sea

$$\begin{aligned} y_{1,1} &= \beta_1 + \beta_2 x_{21} + \beta_3 x_{31} + \varepsilon_1 \\ y_{1,2} &= \beta_1 + \beta_2 x_{22} + \beta_3 x_{32} + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ y_{1,0} &= \beta_1 + \beta_2 x_{2,10} + \beta_3 x_{3,10} + \varepsilon_{10} \end{aligned} \qquad [8]$$

y haciendo

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{1,2} \\ \vdots \\ y_{1,10} \end{bmatrix}; \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_{21} & x_{31} \\ 1 & x_{22} & x_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2,10} & x_{3,10} \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{10} \end{bmatrix}; \ \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \qquad [9]$$

el sistema [8] se convierte en éste, expresado más concisamente,

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

Como las β y las ε son desconocidas, se estiman por b y e, con la condición de que $\sum e_i^2 = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} =$ mínimo. El resultado es

$$\boldsymbol{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{y} \qquad [10]$$

que son los estimadores minimocuadráticos de $\boldsymbol{\beta}$.

Además, se prueba que

$$E(\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{\beta} \quad \text{y que} \quad V(\boldsymbol{b}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \qquad [11]$$

Una estimación de σ^2 (desconocido) se tiene mediante la variancia residual sesgada

$$\bar{S}_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n} = \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{n} \qquad [12]$$

o por la insesgada

$$\bar{S}_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{n-k} \qquad [13]$$

en que

$$\sum e_i^2 = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}'\mathbf{X}'\boldsymbol{y} \qquad [14]$$

El coeficiente de determinación, que permite cuantificar la bondad del ajuste, es

$$R^2 = \frac{\boldsymbol{b}'\mathbf{X}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{n}\sum y_i^2}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{n}\sum y_i^2} \qquad [15]$$

Con estas fórmulas se tiene lo más importante en lo que al cálculo se refiere. Más adelante, no obstante, se seguirán presentando nuevas fórmulas

V. Los datos en notación matricial

Los datos de la tabla 2 vamos a darlos en notación matricial para seguir luego al proceso de cálculo

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 21 \\ 30 \\ 40 \\ 50 \\ 56 \\ 72 \\ 82 \\ 81 \\ 86 \\ 100 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 52 & 120 \\ 1 & 58 & 120 \\ 1 & 64 & 116 \\ 1 & 69 & 109 \\ 1 & 73 & 105 \\ 1 & 78 & 98 \\ 1 & 84 & 96 \\ 1 & 88 & 94 \\ 1 & 93 & 100 \\ 1 & 100 & 100 \end{bmatrix} \qquad [16]$$

Realmente, estas matrices no es necesario escribirlas, como vamos a ver. Se han escrito, no obstante, para facilitar la identificación entre datos y símbolos, tan conveniente para entender la técnica econométrica.

VI. Primeros cálculos a realizar

Observando las fórmulas [10], [11], [14] y [15], se ve que necesitamos empezar calculando $\mathbf{X}'\mathbf{X}$, $\mathbf{X}'\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y}$, para luego obtener $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{y}$, etcétera.

Ahora bien, utilizando símbolos en vez de números, vemos que

$$\mathbf{X'X} = \underset{(3 \times 10)}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,10} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,10} \\ x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3,10} \end{bmatrix}} \underset{(10 \times 3)}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1,10} & x_{2,10} & x_{3,10} \end{bmatrix}} =$$

$$= \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} \sum x_1^2 & \sum x_1 x_2 & \sum x_1 x_3 \\ \sum x_2 x_1 & \sum x_2^2 & \sum x_2 x_3 \\ \sum x_3 x_1 & \sum x_3 x_2 & \sum x_3^2 \end{bmatrix}}$$

o sea, se tiene que $\mathbf{X'X}$ es una matriz simétrica 3×3, cuyos elementos son las sumas

$$\sum x_1^2,\ \sum x_2^2,\ \sum x_3^2,\ \sum x_1 x_2,\ \sum x_1 x_3,\ \sum x_2 x_3 \qquad [17]$$

A su vez

$$\mathbf{X'}\boldsymbol{y} = \underset{(3 \times 10)}{\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1,10} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2,10} \\ x_{31} & x_{32} & \dots & x_{3,10} \end{bmatrix}} \underset{(10 \times 1)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}} = \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \\ \sum x_3 y \end{bmatrix}}$$

y también

$$\boldsymbol{y'y} = \underset{(1 \times 10)}{\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_{10} \end{bmatrix}} \underset{(10 \times 1)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix}} = \underset{(1 \times 1)}{\sum y^2}$$

O sea, además de las sumas [17], también necesitamos estas otras

$$\sum x_1 y,\ \sum x_2 y,\ \sum x_3 y,\ \sum y^2 \qquad [18]$$

con lo cual se tienen todas las sumas de productos posibles con los datos de la tabla 2; así que puede empezarse por esta etapa directamente sin que sea preciso escribir las matrices [16].

Nuestros datos de partida son, pues

$$\begin{array}{llllll}
\sum x_1 = \sum x_1^2 = & 10 & \sum x_2^2 = & 59.787 & (\sum x_1)^2 = & 100 \\
\sum x_1 x_2 = \sum x_2 = & 759 & \sum x_3^2 = & 112.818 & (\sum x_2)^2 = & 576.081 \\
\sum x_1 x_3 = \sum x_3 = & 1.058 & \sum y^2 = & 44.442 & (\sum x_3)^2 = & 1.119.364 \\
\sum x_1 y = \sum y = & 618 & & & (\sum y)^2 = & 381.924 \\
\sum x_2 x_3 = & = 79.090 & & & (\sum x_2)(\sum x_3) = & 803.022 \\
\sum x_2 y = & = 50.560 & & & & \\
\sum x_3 y = & = 63.232 & & & &
\end{array}$$

$$\bar{x}_2 = 75{,}9 \; ; \quad \bar{x}_3 = 105{,}8 \; ; \quad \bar{y} = 61{,}8$$

Todas las cifras son exactas y, por tanto, no hay errores de aproximación. Luego

$$\underset{(3 \times 3)}{\mathbf{X'X}} = \begin{bmatrix} 10 & 759 & 1.058 \\ 759 & 59.787 & 79.090 \\ 1.058 & 19.090 & 112.818 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X'}\boldsymbol{y} = \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} 618 \\ 50.650 \\ 63.232 \end{bmatrix}} \; ; \quad \underset{(1 \times 1)}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} = 44.442} \qquad [19]$$

de donde vamos a partir para seguir realizando cálculos.

VII. Cálculo de $(\mathbf{X'X})^{-1}$

La matriz inversa $(\mathbf{X'X})^{-1}$ aparece en [10] y [11], o sea, es necesaria para obtener las estimaciones $\boldsymbol{b}$ y las variancias de las estimaciones. Como por [19] ya conocemos $\mathbf{X'X}$, sólo basta con obtener la inversa de esta matriz cuadrada 3×3.

El determinante vale

$$|\mathbf{X'X}| = \begin{vmatrix} 10 & 759 & 1.058 \\ 759 & 59.787 & 79.090 \\ 1.058 & 79.090 & 112.818 \end{vmatrix} = 4.514.894 \qquad [20]$$

valor obtenido aplicando la regla de Sarrus. Puesto que $|\mathbf{X'X}| \neq 0$ la matriz $\mathbf{X'X}$ es no singular y tiene inversa.

Designando por $A_{ij}\,(i, j = 1, 2, 3)$ a los adjuntos tenemos que

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 59.787 & 79.090 \\ 79.090 & 112.818 \end{vmatrix} = 489.821.666$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 759 & 79.090 \\ 1.058 & 112.818 \end{vmatrix} = -\ 1.951.642$$

$$A_{13} = -\begin{vmatrix} 759 & 59.787 \\ 1.058 & 79.090 \end{vmatrix} = -\ 3.225.336$$

Análogamente, se tiene

$$A_{21} = -\ 1.951.642 \quad , \quad A_{22} = 8.816 \quad , \quad A_{23} = 12.122$$
$$A_{31} = -\ 3.225.336 \quad , \quad A_{32} = 12.122 \quad , \quad A_{33} = 21.789$$

La matriz adjunta es, pues,

$$[A_{ij}] = \begin{bmatrix} 489.821.666 & -\ 1.951.642 & -\ 3.225.336 \\ -\ 1.951.642 & 8.816 & 12.122 \\ -\ 3.225.336 & 12.122 & 21.789 \end{bmatrix} \qquad [21]$$

La matriz inversa se obtiene ya dividiendo cada elemento de $[A_{ij}]$ por $|\mathbf{X'X}| = 4.514.894$.[1] Así, pues,

$$(\mathbf{X'X})^{-1} = \begin{bmatrix} 108{,}490180729 & -\ 0{,}432267513 & -\ 0{,}714376905 \\ -\ 0{,}432267513 & 0{,}001952648 & 0{,}002684891 \\ -\ 0{,}714376905 & 0{,}002684891 & 0{,}004826030 \end{bmatrix} \qquad [22]$$

es la matriz inversa que deseábamos calcular

Conviene señalar que el cálculo de esta inversa se ha hecho siguiendo el método más usualmente explicado en los libros de texto. Actualmente, si se dispone de un ordenador, o de una máquina de calcular con programas, es mucho más fácil y rápida la obtención de esta matriz.

Otra cuestión a tener en cuenta es la conveniencia de utilizar tantas cifras decimales como sea posible para no introducir errores de cálculo en los resultados. Por ejemplo, si se realiza la prueba de multiplicar $\mathbf{X'X}$ por su inversa para comprobar que se obtiene la matriz unitaria, o sea,

$$\mathbf{X'X}\,(\mathbf{X'X})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [23]$$

veremos en seguida esa necesidad de trabajar con muchas cifras decimales, lo que hace más pesado el trabajo de cálculo. En nuestro caso, multiplicando la

1. Por ser la matriz $\mathbf{X'X}$ simétrica, la matriz $[A_{ji}] = [A_{ij}]$.

primera fila de [19] por la primera columna de [22] (y sumando los tres términos) se tiene:

$$\begin{array}{rrrr}
10 \times & 108{,}490180729 \rightarrow & & 1.084{,}90180729 \\
-\ 759 \times & 0{,}432267513 \rightarrow & - & 328{,}09104237 \\
-\ 1.058 \times & 0{,}714376905 \rightarrow & - & 755{,}81076549 \\
\hline
 & & & 0{,}99999943
\end{array}$$

donde puede verse la gran precisión con que se está trabajando ya que el resultado prácticamente no difiere nada de 1. El error cometido es menor que una millonésima.

VIII. Cálculo de las estimaciones $\boldsymbol{b}$

De acuerdo con [6], [18] y [15], podemos escribir

$$\boldsymbol{b} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\,\mathbf{X}'\boldsymbol{y} =$$

$$= \underset{(3 \times 3)}{\begin{bmatrix} 108{,}490180729 & -0{,}432267513 & -0{,}714376905 \\ -0{,}432267513 & 0{,}001952648 & 0{,}002684891 \\ -0{,}714376905 & 0{,}002684891 & 0{,}004826030 \end{bmatrix}} \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} 618 \\ 50.650 \\ 63.232 \end{bmatrix}} =$$

$$= \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} 20{,}005776282 \\ 1{,}355587558 \\ -0{,}577309370 \end{bmatrix}} = \underset{(3 \times 1)}{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}} \qquad [24]$$

teniéndose ya las estimaciones m. c. b_1, b_2 y b_3, así que la función lineal ajustada es

$$\boxed{y^* = 20{,}0057 + 1{,}3556\, x_2 - 0{,}5773\, x_3} \qquad [25]$$

Esta ecuación, atendiendo solamente a los signos, nos dice que las importaciones españolas están directamente relacionadas con X_2 (PNB) e inversamente relacionadas con X_3 (precios relativos de las importaciones). O sea, los aumentos en el PNB provocan aumentos en las importaciones, y los aumentos en los precios relativos hacen disminuir las importaciones. Debe tenerse presente, sin embargo, que los coeficientes de regresión utilizados para concluir lo anterior son coeficientes de regresión parcial; esto quiere decir que la inclusión de nuevas variables para explicar el comportamiento de las importaciones o la exclusión de alguna de las utilizadas en [25] puede cambiar esa conclusión. El coeficiente de regresión parcial da el efecto *neto* después de eliminar los efectos de otras variables y, así, este efecto neto depende de los efectos eliminados, o sea, de que en la ecuación figuren más o menos variables explicativas.

IX. Cálculo de $V(\boldsymbol{b})$

De la expresión [11] se ve que es necesario calcular previamente σ^2, mediante [12] o mediante [13]. Primero de todo hay que obtener

$$\sum e_i^2 = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \qquad \text{según [14].}$$

De [19] se tiene que

$$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} = 44.442 \qquad [26]$$

y de [19] y [24] resulta

$$\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = 44.442 - \begin{bmatrix} 20{,}005776282 \\ 1{,}355587558 \\ -0{,}577309370 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 618 \\ 50.650 \\ 63.232 \end{bmatrix} = \begin{matrix} 44.442 - \\ 44.397{,}650590916 = \end{matrix}$$

$$= 44{,}349409084 = \sum e_i^2 \qquad [27]$$

Obsérvese que este resultado no puede ser nunca negativo, pues se trata de una suma de cuadrados.

La *variancia residual sesgada*, fórmula [12], vale

$$S_e^2 = \frac{44{,}349409084}{10} = 4{,}4349409084 \qquad [28]$$

y la *variancia residual insesgada*, fórmula [13], para $k = 3$, es

$$\bar{S}_e^2 = \frac{44{,}349409084}{7} = 6{,}335629869 \qquad [29]$$

Luego, de [11], [22] y [29]

$$V(\boldsymbol{b}) = 6{,}335629869 \begin{bmatrix} 108{,}490180729 & -0{,}432267513 & -0{,}714376905 \\ -0{,}432267513 & 0{,}001952648 & 0{,}002684891 \\ -0{,}714376905 & 0{,}002684891 & 0{,}004826030 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 687{,}3536 & -2{,}7387 & -4{,}5260 \\ -2{,}7387 & 0{,}0124 & 0{,}0170 \\ -4{,}5260 & 0{,}0170 & 0{,}0293 \end{bmatrix} \qquad [30]$$

con lo que se tiene la matriz de variancias y covariancias (insesgadas) de las estimaciones b_1, b_2 y b_3. Debe tenerse en cuenta que las variancias —los elementos de la diagonal principal en [30]— han de ser necesariamente positivas, mientras que las covariancias pueden ser positivas o negativas.

A nosotros nos interesan las variancias (insesgadas), cuyos valores concretos son

$$\boxed{\bar{S}^2_{b_1} = 687{,}3536 \quad ; \quad \bar{S}^2_{b_2} = 0{,}0124 \quad ; \quad \bar{S}^2_{b_3} = 0{,}0293} \qquad [31]$$

y los errores estándar (insesgados, desviaciones estándar) de las estimaciones son

$$\boxed{\bar{S}_{b_1} = 26{,}22 \quad ; \quad \bar{S}_{b_2} = 0{,}11 \quad ; \quad \bar{S}_{b_3} = 0{,}17} \qquad [32]$$

Por tanto, la función ajustada por mínimos cuadrados, en virtud de [25] y [32], es

$$\boxed{\begin{array}{c} y^* = 20{,}0057 + 1{,}3556\, x_2 - 0{,}5773\, x_3 \\ \quad (26{,}22) \qquad (0{,}11) \qquad\quad (0{,}17) \end{array}} \qquad [33]$$

X. Cálculo del coeficiente de determinación

El coeficiente de determinación viene dado por esta fórmula

$$R^2 = \frac{\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \dfrac{(\sum y_i)^2}{n}}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \dfrac{(\sum y_i)^2}{n}} \qquad [34]$$

que da una estimación sesgada de ρ^2. La estimación insesgada es

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(1 - R^2)(n - 1)}{(n - k)} \qquad [35]$$

Sabemos, de [14] y [27], que

$$\boldsymbol{b}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = 44.397{,}650590916\,,$$

de [19] que

$$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} = 44.442$$

y, de los cálculos de la sección VI, que

$$\frac{1}{n}\left(\sum y_i\right)^2 = \frac{381.924}{10} = 38.192{,}4$$

Por tanto,

$$R^2 = \frac{44.397{,}650590916 - 38.192{,}4}{44.442 - 38.192{,}4} = 0{,}992904 \qquad [36]$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(1 - 0{,}992904)(10 - 1)}{10 - 3} = 0{,}9909 \qquad [37]$$

XI. Resultados

De todo lo anterior se tiene que la función de importación para la economía española es

$$\boxed{\begin{array}{llll} y^* = 20{,}0057 + & 1{,}3556\, x_2 - & 0{,}5773\, x_3\,. & R^2 = 0{,}9929 \\ \quad\;\; (26{,}22) & (0{,}11) & (0{,}17) & \bar{R}^2 = 0{,}9909 \end{array}} \qquad [38]$$

XII. Análisis de los resultados

De la simple inspección de los resultados se desprende que el modelo adoptado para estudiar el comportamiento de las importaciones tiene un gran poder descriptivo ya que el 99 por ciento de las variaciones de Y vienen explicadas por las variables X_2 y X_3 ligadas por una relación lineal.

Los valores 0,11 y 0,17 para los errores de las estimaciones de los parámetros, a saber, 1,3556 y — 0,5773, respectivamente, son lo suficientemente pequeños en relación con estas últimas estimaciones (las estimaciones son más de tres veces los errores estándar) como para afirmar, provisionalmente, que las variables X_2 y X_3 son, en efecto, variables explicativas.

La prueba correcta de lo dicho se realiza partiendo de la hipótesis de que las perturbaciones ε_i se distribuyen normalmente, lo que hace que los estimadores minimocuadráticos $\boldsymbol{b}$ sean también estimadores maximoverosímiles que se distribuyen también normalmente. Debido a esta propiedad puede utilizarse la t de Student para hallar intervalos de confianza para las estimaciones por puntos $b_2 = 1{,}3556$ y $b_3 = -0{,}5773$.

Un intervalo de confianza para el p por ciento de significación es

$$b_i \pm t_p \bar{S}_{b_i} \qquad [39]$$

Puesto que los grados de libertad para la t son $n - k = 10 - 3 = 7$ se tiene, para ambas colas (véase la tabla de la t)

$$t_{0,05} = 2{,}365 \quad , \quad t_{0,01} = 3{,}499$$

así que para $b_2 = 1{,}3556$ es

$$1{,}3556 \pm 2{,}365 \times 0{,}11 = \begin{matrix} \nearrow & 1{,}095 \\ \searrow & 1{,}616 \end{matrix} \Bigg\} \text{ nivel } 5\,\%$$

$$1{,}3556 \pm 3{,}499 \times 0{,}11 = \begin{matrix} \nearrow & 0{,}971 \\ \searrow & 1{,}940 \end{matrix} \Bigg\} \text{ nivel } 1\,\%$$

A ambos niveles, los intervalos de confianza excluyen el valor cero para b_2, así que puede concluirse que b_2 es significativo, o sea, que la variable X_2 influye positivamente en la Y.

Para $b_3 = -0{,}5773$ se tiene

$$-0{,}5773 \pm 2{,}365 \times 0{,}17 = \begin{matrix} \nearrow & -0{,}979 \\ \searrow & -0{,}175 \end{matrix} \Bigg\} \text{ nivel } 5\,\%$$

$$-0{,}5773 \pm 3{,}499 \times 0{,}17 = \begin{matrix} \nearrow & -1{,}172 \\ \searrow & +0{,}017 \end{matrix} \Bigg\} \text{ nivel } 1\,\%$$

Así que, para el nivel del 5 por ciento, el valor $b_3 = -0{,}5773$ es significativo, es decir, la variable X_3 ejerce influencia sobre la importaciones. Al nivel del 1 por ciento se da el cambio de signo entre ambos límites del intervalo, luego este intervalo contiene al cero, que expresa que la variable X_3 no influye en Y. Hay, pues, dos conclusiones distintas para b_3.

El intervalo [39] puede también escribirse así:

$$b_i \pm t_p \bar{S}_{b_i} \rightarrow \frac{b_i}{\bar{S}_{b_i}} \pm t_p$$

Como $\dfrac{b_i}{S_{b_i}}$ es una t, el intervalo no contiene el cero al nivel de p por ciento si

$$\frac{b_i}{\bar{S}_{b_i}} = t < t_p$$

Así queda que el t_p, dado por las tablas, tiene que ser mayor que el t calculado de los datos para que b_i sea significativa. Utilizando este otro modo de operar se tiene que

$$\text{para } b_2 = 1{,}3556 \rightarrow \frac{1{,}3556}{0{,}11} = 12{,}32 > t_{0,01} = 3{,}449 > t_{0,05} = 2{,}365$$

$$\text{para } b_3 = -\,0{,}5773 \rightarrow \frac{0{,}5773}{0{,}17} = \ 3{,}40 < t_{0,01} = 3{,}449 > t_{0,05} = 2{,}365$$

En resumen, las estimaciones por puntos, $b_2 = 1{,}3556$ y $b_3 = -\,0{,}5773$, dan valores significativos de dependencia entre Y y X_2 e Y y X_3 para ambos niveles (5 y 1 por ciento) en el primer caso y para el primero (5 por ciento) en el caso de b_3. En general, y mediante el análisis individual de cada parámetro, puede sostenerse que X_2 y X_3 influyen en Y.

El lector observará que no se ha discutido el caso de $b_1 = 20{,}0057$, lo cual es debido al hecho de que nuestra atención está centrada en lo siguiente: Al formular el modelo hemos dicho que Y depende linealmente de X_2 y X_3, y esta hipótesis es la que hemos tratado de verificar utilizando b_2 y b_3. La b_1 no desempeña un papel relevante en la hipótesis.

XIII. Análisis de la variancia

Mediante la t de Student se puede conocer, variable a variable, si su efecto sobre la dependiente es o no significativo. Con el análisis de la variancia se persigue conocer globalmente la bondad del modelo. La tabla para el análisis de la variancia es ésta:

Fuente de variación	Suma de cuadrados	G. de l.	Variancias insesgadas
Var. expl. X_2, X_3	$\Sigma(y_i^* - \bar{y})^2$	$k - 1$	$\bar{S}^2_{y*}$
Residuos	Σe_i^2	$n - k$	$\bar{S}^2_e$
Total	$\Sigma(y_i - \bar{y})^2$	$n - 1$	S^2_y

en que

$$\sum (y_i^* - \bar{y})^2 = \boldsymbol{b}'\mathbf{X}'\boldsymbol{y} - \frac{1}{n}(\sum y_i)^2 = 44.397{,}650590916 - 38.192{,}4 =$$
$$= 6.205{,}250590916$$

en virtud de [34] y [36]. Por otra parte

$$\sum e_i^2 = 44{,}349409084$$

según [27]. Por tanto, la tabla es

Fuente de variación	Suma de cuadrados	G. de l.	Variancias insesgadas
X_2, X_3	6.205,250590916	2	3.102,6253
Residuos	44,349409084	7	6,3356
TOTAL	6.249,600000000	9	694,40

Por tanto,

$$F = \frac{\bar{S}^2_{y^*}}{\bar{S}^2_e} = \frac{3.102{,}6253}{6{,}3356} = 489{,}71$$

Para 2 y 7 g. de l. y, para niveles 5 y 1 por ciento se tiene

$$F_{0,05} = 4{,}74 \qquad F_{0,01} = 9{,}55$$

Como el valor de F calculado (489,71) es mayor que el correspondiente a los dos niveles, la diferencia entre las dos variancias ($\bar{S}^2_{y*}$, que mide las variaciones explicadas y $\bar{S}^2_e$, que mide las variaciones inexplicadas) no es debida al muestreo, sino que es debida al modelo tomado (globalmente considerado) para explicar las variaciones de las importaciones. Por tanto, no hay motivos para rechazar el modelo.

La bondad del modelo, sin el uso de tablas, queda también probada examinando el coeficiente de determinación. En efecto, de [36] y [37] se tiene

$$R^2 = 0{,}9929 \qquad \text{y} \qquad \bar{R}^2 = 0{,}9909$$

que, sin ninguna otra prueba, nos hablan del gran poder explicativo del modelo, lo que era de esperar después de conocer el resultado del test F.

XIV. La autocorrelación

Una hipótesis usual, como ya fue indicado en los modelos econométricos, cuando se trabaja con datos temporales, es la inexistencia de autocorrelación en los residuos. Vamos a probarla. Ello requiere el cálculo de los residuos. Sabemos que, según [38],

$$y = 20{,}0057 + 1{,}3556\, x_2 - 0{,}5773\, x_3 + e$$

y como conocemos los valores de Y, X_2, X_3 (tabla 2) se tiene

Tabla 3

Años	Y	b_1	$b_2 x_2$	$b_3 x_3$	y^*	$e = y - y^*$
1960	21	20,0057	70,49	— 69,28	21,22	— 0,22
1961	30	20,0057	78,62	— 69,28	29,35	0,65
1962	40	20,0057	86,76	— 66,97	39,80	0,20
1963	50	20,0057	93,54	— 62,93	50,62	— 0,62
1964	56	20,0057	98,96	— 60,62	58,35	— 2,35
1965	72	20,0057	105,74	— 56,58	69,17	2,83
1966	82	20,0057	113,87	— 55,42	78,46	3,54
1967	81	20,0057	119,29	— 54,27	85,03	— 4,03
1968	86	20,0057	126,07	— 57,73	88,35	— 2,35
1969	100	20,0057	135,56	— 57,73	97,84	2,16
						— 0,19

La suma de los errores, $\sum e_i$, debe ser igual a cero. Aquí no lo es por el redondeo de cifras.

Para probar la autocorrelación se puede obtener la razón de von Neumann:

$$v = \frac{\delta^2}{S_e^2} = \frac{n}{n-1} \frac{\sum (e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^2} = \frac{10}{9} \frac{119{,}2686}{53{,}3873} = \frac{1.192{,}686}{480{,}4857} = 2{,}48$$

Consultando la tabla de Hart, para $n = 10$ y al nivel del 5 por ciento, se tienen los siguientes límites:

$$(1{,}1803 \quad ; \quad 3{,}2642)$$

y para el 1 por ciento

$$(0{,}8353 \quad ; \quad 3{,}6091)$$

En ambos casos, el valor calculado $v = 2{,}48$ es interior a los límites dados por la tabla, luego puede aceptarse la hipótesis de que los residuos no están autocorrelacionados.

La hipótesis de que las perturbaciones no están autocorrelacionadas puede también verificarse mediante el test de Durbin-Watson que se define así:

$$d = \frac{\sum (e_t - e_{t-1})^2}{\sum e_t^2} = \frac{119{,}2686}{53{,}3873} = 2{,}234$$

Las tablas de este test, para $n = 10$ (número de observaciones) y $k = 2$ (número de variables explicativas), y para el nivel del 5 por ciento, dan el intervalo

$$(0{,}95 \quad ; \quad 1{,}54)$$

y para el nivel del 1 por ciento

$$(0{,}70 \quad ; \quad 1{,}25)$$

(realmente, estos valores son para $n = 15$, que es el tamaño muestral mínimo considerado en las tablas; para $n = 10$, los valores límites difieren muy poco de los dados). La significación de $d = 2{,}234$ se hace según las siguientes reglas:

a) Si $d <$ límite inferior del intervalo, entonces tal valor de d indica presencia de autocorrelación *positiva* (éste no es el caso nuestro).

b) Si d está entre ambos límites *no puede concluirse nada* (éste tampoco es nuestro caso).

c) Si $d >$ límite superior, entonces *no se rechaza la hipótesis nula* (éste es el caso de nuestro ejercicio). Por tanto, puede aceptarse la hipótesis de no existir autocorrelación, con lo que se llega a mismo resultado que con el test de Von Neumann.

XV. Distribución de las perturbaciones

Como se recordará, otra hipótesis utilizada es que las perturbaciones se distribuyen normalmente. Vamos a ver si esta hipótesis se verifica en la realidad, lo cual es de importancia para poder admitir la estimación por intervalos (sección XII).

En la tabla 3 se tienen los diez residuos que nos van a servir para conocer el comportamiento de las perturbaciones. El tamaño muestral, $n = 10$, es demasiado pequeño para conocer cómo se distribuyen los errores. No obstante, estudiaremos esta distribución.

En la tabla 4 se tienen los diez residuos distribuidos según los intervalos adoptados. También se ha dibujado el histograma consiguiente (gráfico 1) y puede verse que la distribución de los residuos es campaniforme y simétrica, esto es, semejante a la distribución normal, luego, sin otra prueba, concluimos que puede aceptarse la hipótesis de normalidad en las perturbaciones y, así, son válidas aquellas pruebas en que nos hemos servido de la t y de la F.

TABLA 4

Residuos (intervalos)		Frecuencias n_i
−5	−3	1
−3	−1	2
−1	1	4
1	3	2
3	5	1
		10

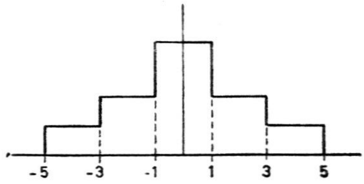


GRÁFICO 1

XVI. RESUMEN DE RESULTADOS

El modelo cuantificado de las importaciones, con todos los resultados que se han ido obteniendo es, pues,

$$
\begin{array}{lccc}
Y^* = 20{,}0057 + & 1{,}3556\, X_2 & - \; 0{,}5773\, X_3 & R^2 = 0{,}99 \\
\text{errores estándar} \rightarrow & (0{,}11) & (0{,}17) & \\
\text{valores de } t \quad \rightarrow & (12{,}32) & (3{,}40) & F = 489{,}71
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
t_{0,01} = 2{,}365 & t_{0,05} = 3{,}499 & F_{0,01} = 4{,}74 \\
n = 10 \;\; ; \;\; v = 2{,}48 & ; \;\; d = 2{,}23 & F_{0,05} = 9{,}55
\end{array}
$$

en donde cabe concluir que las variables X_2 y X_3 explican adecuadamente bien el comportamiento de las importaciones así que la ecuación ajustada sirve para *describir* la relación existente —la lineal— entre las tres variables y para *explicar* el comportamiento de las variaciones de las importaciones.

Generalmente, en la presentación de un modelo cuantificado no se suele dar tanta información como la dada aquí, pero si se da se tienen a la vista todos los datos que permiten juzgar la bondad del modelo.

Se puede decir ya que cuando la variable X_2 aumenta en una unidad la variable Y *aumenta* en 1,3556, y que cuando X_3 aumenta en una unidad la variable Y *disminuye* en 0,5773. Como las variables Y, X_2 y X_3 vienen dadas en números índices (con base en 1969) resulta que estos aumentos (o disminuciones) son porcentajes con respecto al año base. Aunque esto puede parecer que son las elasticidades, vamos a ver a continuación que no es así. Las elasticidades —de la variable Y con respecto a X_2 y X_3— se calculan del modo que se expone a continuación.

XVII. Cálculo de las elasticidades

En las fórmulas [3], [4], [5] y [7] se tiene el modelo usual para el cálculo de las elasticidades de la variable dependiente con respecto a las independientes. En general, el cálculo de elasticidades puede hacerse utilizando diversas funciones. El uso de la potencial, [3], se debe a que los parámetros que hacen de exponentes, o sea, β_2 y β_3, dan las elasticidades de Y con respecto a X_2 y de Y con respecto a X_3, respectivamente, con la característica de que las elasticidades dichas son *constantes* en todos los puntos de la función. Por ello, la función potencial es la preferida para calcular las elasticidades.

El modelo es, pues,

$$\log Y = \log A + \beta_2 \log X_2 + \beta_3 \log X_3 + \varepsilon \qquad [40]$$

o bien,

$$y = \beta_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon \qquad [41]$$

en que el cambio hecho no necesita explicación.

Se trata de cuantificar β_1, β_2 y β_3 con los datos de las tabla 5, en donde se dan los logaritmos decimales de los números índices dados en la tabla 2. Se trabaja aquí con logaritmos decimales, pero resulta lo mismo si se emplean logaritmos neperianos. Se han preferido los decimales porque son los más usualmente conocidos.

Tabla 5

Años	$\log Y$ y	$\log X_2$ x_2	$\log X_3$ x_3
1960	1,322219	1,716003	2,079181
1961	1,477121	1,763428	2,079181
1962	1,602060	1,806180	2.064458
1963	1,698970	1,838849	2,037426
1964	1,748188	1,863323	2,021189
1965	1,857332	1,892095	1,991226
1966	1,913814	1,924279	1,982271
1967	1,908485	1,944483	1,973128
1968	1,934498	1,968483	2,000000
1969	2,000000	2,000000	2,000000

De los datos de la tabla se tienen los siguientes resultados:

$$\sum y = 17{,}462687 \qquad \sum y^2 = 30{,}936381 \qquad \sum y\, x_2 = 32{,}864930$$
$$\sum x_2 = 18{,}717123 \qquad \sum x_2^2 = 35{,}108770 \qquad \sum y\, x_3 = 35{,}249435$$
$$\sum x_3 = 20{,}228060 \qquad \sum x_3^2 = 40{,}931937 \qquad \sum x_2 x_3 = 37{,}831520$$

Con estos datos, y haciendo

$$y^* = b_1 + b_2\, x_2 + b_3\, x_3 \qquad [42]$$

para la relación que estima a la [41], se tiene, tras aplicar la metodología ya conocida,

$$\begin{array}{lccl} y^* = 2{,}06 + & 1{,}84\, x_2 + & 1{,}37\, x_3 \quad ; & R^2 = 0{,}98 \\ \text{errores estándar} & (0{,}30) & (0{,}68) & F = 169{,}16 \\ \text{valores de } t & (6{,}06) & (1{,}94) & F_{0,01} = 4{,}74 \\ t_{0,01} = 2{,}365 \quad ; & t_{0,05} = 3{,}499 & & F_{0,05} = 9{,}55 \end{array} \qquad [43]$$

que es nuestro modelo cuantificado. En él puede apreciarse que la variable X_3 no es significativa (véanse los valores de t) pero todo el modelo sí es bueno (véanse los valores de F).

Por tanto, las elasticidades son:

$$E^{Y}_{X_2} = 1{,}84 \quad ; \quad E^{Y}_{X_3} = -1{,}37 \qquad [44]$$

Así que cuando X_2 *aumenta* un 1 por ciento (en cualquier punto) la variable Y *aumenta* un 1,84 por ciento (en el punto correspondiente) y cuando X_3 *aumenta* un 1 por ciento la variable Y *disminuye* un 1,37 por ciento.

Se tienen, así, las elasticidades deseadas.

XVIII. Representación gráfica

El modelo expuesto en la sección XVII se puede representar gráficamente separando sus componentes, esto es, los distintos términos de la función cuantificada. Tales términos (b_1, $b_2\, x_2$, $b_3\, x_3$ y e) se tienen en la tabla 3. La representación gráfica es fácil de entender y de realizar pues basta con observar la figura y los datos de la tabla 3.

En la parte inferior del gráfico 2 se tienen representados los valores de Y observados y los de Y^* dados por el modelo. La gran coincidencia entre ambas

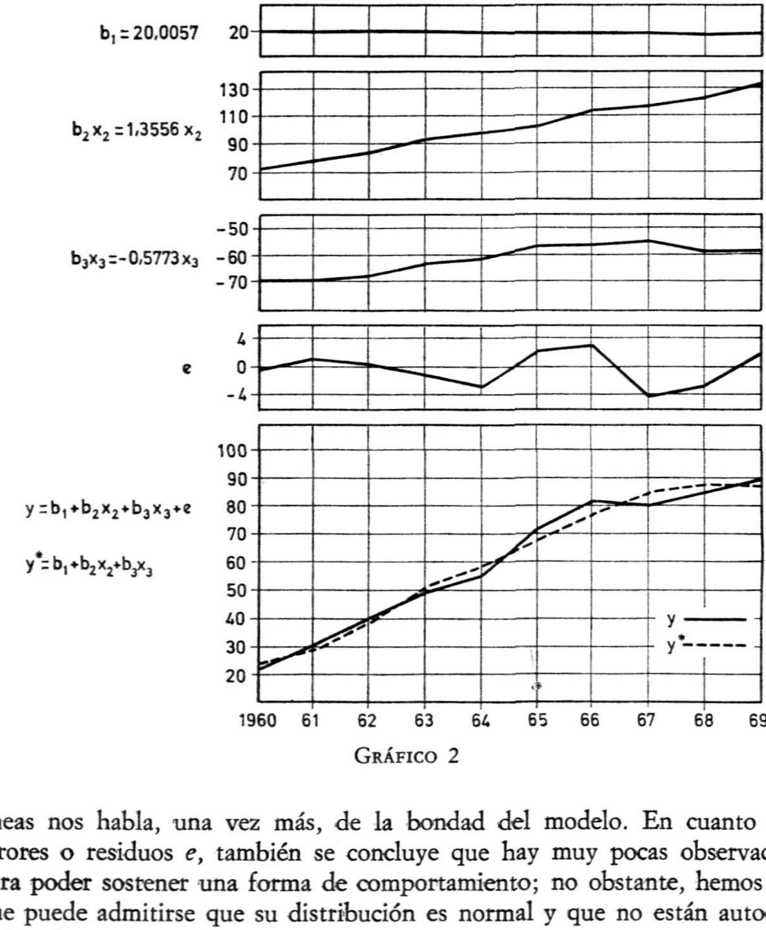


GRÁFICO 2

líneas nos habla, una vez más, de la bondad del modelo. En cuanto a los errores o residuos *e*, también se concluye que hay muy pocas observaciones para poder sostener una forma de comportamiento; no obstante, hemos visto que puede admitirse que su distribución es normal y que no están autocorrelacionados.

XX. Resumen

Se señala, en primer lugar, que todos los cálculos realizados se han hecho con una máquina de calcular de mesa. No se ha utilizado ningún programa de cálculo por entender que el mejor modo de aprender la cuantificación de un modelo es seguir paso a paso todas las operaciones que se deducen del tratamiento matemático directo. Quiere esto decir que con máquinas y programas apropiados es mucho más rápido alcanzar el final, mas, para ello, se necesita conocer la máquina y el programa de cálculo más conveniente. La programación, por tanto, es una operación que viene en función de la máquina calculadora, computador u ordenador.

En segundo lugar, es justo señalar que los cálculos de cuantificación del modelo $y^* = b_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3$ fueron realizados como ejercicio de clase, por los alumnos Alfonso Erhardt Alzaga, Ignacio Benjumea Díez y Juan Gómez Landero. Los del modelo $y^* = A\, x_1^{b_1} x_2^{b_2}$ los realizó el alumno Jesús Sánchez.

Finalmente, se añaden en el Apéndice la tabla 1 (Distribución normal tipificada), tabla 2 (Distribución t), tabla 3 (Distribución F) y tabla 4 (Test d de Durbin-Watson) para que el lector pueda seguir la marcha de algunos cálculos y razonamientos.

Facultad de Ciencias Económicas.

Universidad de Málaga.

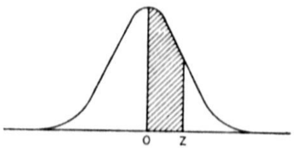


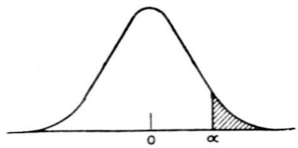
TABLA 1. — *Distribución normal tipificada*

Probabilidades para valores específicos de z

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441

1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4950	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

TABLA 2. — *Distribución* t



Valores de t para probabilidades específicas de α

ν	$\alpha = 0{,}10$	$= 0{,}05$	$= 0{,}025$	$= 0{,}01$	$= 0{,}005$
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3.707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2.831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2.060	2.485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
—	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

TABLA 3. — *Distribución* F

Nivel de significación = 0,05

ν^2/ν^1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	254
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,37
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	1,84
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,39
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,00

TABLA 4. — *Test de Durbin-Watson*

Nivel de significación = 0,05

Número de observaciones	Número de variables independientes									
	1		2		3		4		5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75	0,69	1,97	0,56	2,21
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68	0,90	1,83	0,79	1,99
25	1,29	1,45	1,21	1,55	1,12	1,66	1,04	1,77	0,95	1,89
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65	1,14	1,74	1,07	1,83
40	1,44	1,54	1,39	1,60	1,34	1,66	1,29	1,72	1,23	1,79
50	1,50	1,59	1,46	1,63	1,42	1,67	1,38	1,72	1,34	1,77
60	1,55	1,62	1,51	1,65	1,48	1,69	1,44	1,73	1,41	1,77
80	1,61	1,66	1,59	1,69	1,56	1,72	1,53	1,74	1,51	1,77
100	1,65	1,69	1,63	1,72	1,61	1,74	1,59	1,76	1,57	1,78

Para valores de d entre d y D_u la hipótesis de autocorrelación no puede ser ni confirmada ni rechazada al nivel de significación de 0,05.